Κεφάλαιο 4

Ομάδες και τοπολογικοί χώροι

Υπενθυμίζουμε γνωστές έννοιες σχετικά με ομάδες και τοπολογικούς χώρους.

\# **Ορισμός 4.0.0.1** *Μια συλλογή αντικειμένων O καλείται* **ομάδα**, *αν είναι εφοδιασμένη με μια πράξη ώστε αυτή να είναι προσεταιριστική $(ab)c = a(bc)$, να έχει ταυτοτικό στοιχείο e ώστε $ae = a = ea$ και για κάθε στοιχείο a να υπάρχει ένα a' ώστε $aa' = e = a'a$.*

\# **Ορισμός 4.0.0.2** *Μια συλλογή αντικειμένων X καλείται* **τοπολογικός χώρος**, *αν είναι εφοδιασμένη με μια συλλογή υποσυνόλων του T τα οποία θα καλούνται ανοικτά σύνολα ώστε να ικανοποιεί τις επόμενες συνθήκες.*
1) Το κενό σύνολο και ο X βρίσκονται στη συλλογή.
2) Η ένωση οποιουδήποτε αριθμού στοιχείων της συλλογής είναι στοιχείο της συλλογής.
3) Η τομή πεπερασμένου αριθμού στοιχείων της συλλογής είναι στοιχείο της συλλογής.

REMEMBER
i) $\emptyset, X \in \mathcal{T}$
ii) $\bigcup_{i \in I} A_i \in \mathcal{T}$
iii) $A \cap B \in \mathcal{T}$

Μια συγκεκριμένη συλλογή υποσυνόλων του X όπως προηγουμένως καλείται μια τοπολογία για τον X και τα εν λόγω υποσύνολα ανοικτά υποσύνολα.

Για το αντικείμενο μελέτης μας, τις τοπολογικές ομάδες, θα θεωρήσουμε ότι ικανοποιείται και η επόμενη συνθήκη. Αν a και b είναι δυο αντικείμενα του X, τότε υπάρχει ένα στοιχείο A της συλλογής T το οποίο περιέχει το a και δεν περιέχει το b. ή $\exists B$ με $y \in B : B \cap A = \emptyset$

REMEMBER
$\bigcap_n \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \{0\}$
$\varepsilon > 0$ $\exists m \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{m} < \varepsilon$
$\left(-\frac{1}{m}, \frac{1}{m}\right) \neq \varepsilon$

Ορισμός 4.0.0.3 *Μια συλλογή αντικειμένων O καλείται* **τοπολογική ομάδα**, *αν είναι ομάδα, τοπολογικός χώρος, η πράξη της ομάδας είναι συνεχής απεικόνιση και η πράξη του αντιστρόφου στοιχείου $O \to O$ με $a \longmapsto a^{-1}$ είναι επίσης συνεχής απεικόνιση.*

Διαφορετικά, η απεικόνιση $\phi : O \times O \to O$ με τύπο $\phi(a, b) = ab^{-1}$ είναι συνεχής απεικόνιση όπου το σύνολο $O \times O$ έχει την καρτεσιανή τοπολογία.

Βάση $\mathcal{B}$ μιας $\mathcal{T}$ του X είναι ένα υποσύνολο του $\mathcal{T}$ ώστε:
1) $\forall x \in X$, $\exists A \in \mathcal{B}$ ώστε $x \in A$
2) $\forall A, B \in \mathcal{B}$ και $\forall x \in A \cap B$, $\exists C \in \mathcal{B}$ ώστε $C \subseteq A \cap B$

κάθε $D \in \mathcal{T}$ αν-ν $\forall x \in D$, $\exists A \in \mathcal{B}$ με $x \in A \subseteq D$

Δηλαδή η τοπολογική δομή του χώρου συνδέεται με την αλγεβρική του δομή. Η απαίτηση αυτή είναι ιδιαίτερα περιοριστική.

Το εσωτερικό γινόμενο σ' έναν Ευκλείδειο χώρο V ορίζει μετρική $d : V \times V \to \mathbb{R}^+ \cup 0$ με $d(u, v) = \sqrt{< u - v, u - v >}$ και ο V γίνεται τοπολογικός χώρος.

Με το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο 3.1.0.1 ο $\mathbb{R}^n$ γίνεται μετρικός χώρος. Με τη μετρική ορίζεται μια βάση ανοικτών περιοχών με ανοικτά σύνολα τις ανοικτές μπάλες κέντρου v και ακτίνας $\varepsilon > 0$ $\{B_\varepsilon(u) | u \in \mathbb{R}^n, \varepsilon > 0\}$ βαση

$$B_\varepsilon(u) = B(v, \varepsilon) = \{u \in \mathbb{R}^n \mid d(v, u) < \varepsilon\}.$$

Εδώ μπορούμε να πάρουμε όλα τα $v = (x_1, \cdots, x_n)$ ώστε $x_i \in \mathbb{Q}$ και $\varepsilon \in \mathbb{Q}$. Δηλαδή ο $\mathbb{R}^n$ έχει **αριθμήσιμη βάση περιοχών**.

Ορισμός 4.0.0.4 *Ενα υποσύνολο $A \subseteq \mathbb{R}^n$* με τη συνήθη τοπολ. *καλείται* **ανοικτό**, *αν για κάθε $v \in A$ υπάρχει $B(v, \varepsilon)$ ώστε $B(v, \varepsilon) \subseteq A$. Εδώ $B(v, \varepsilon)$ είναι η ανοικτή μπάλα με κέντρο το v και ακτίνα $\varepsilon > 0$. Δηλαδή το σύνολο $\{u \in \mathbb{R}^n | \ ||u - v|| < \varepsilon\}$.*

Ορισμός 4.0.0.5 *Εστω $A \subseteq \mathbb{R}^n$ και απεικόνιση $f : A \to \mathbb{R}^m$. Η f θα καλείται* **συνεχής** *στο $v \in A$, αν για κάθε $B(f(v), \varepsilon)$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $f(A \cap B(v, \delta)) \subseteq B(f(v), \varepsilon)$.*

Αν το προηγούμενο ισχύει για κάθε στοιχείο του A, τότε η f θα καλείται συνεχής στο A.

Ορισμός 4.0.0.6 *Εστω X, Y τοπολογικοί χώροι και απεικόνιση $f : X \to Y$ συνεχής. Η f θα καλείται* **ομοιομορφισμός** *αν είναι 1-1, επί και η αντίστροφη $f^{-1} : Y \to X$ είναι επίσης συνεχής. Τότε γράφουμε $X \cong Y$.*

Παράδειγμα 4.0.0.7 *Εστω $f : [0, 2\pi) \to S^1$ με $f(t) = e^{it}$.* cost+isint *Η f είναι συνεχής 1-1 και επί αλλά η f^{-1} δεν είναι συνεχής.*

Παράδειγμα 4.0.0.8 *Οι πραγματικοί αριθμοί είναι ταυτόχρονα τοπολογικός (μετρικός) χώρος και ομάδα με την πρόσθεση. Οι προηγούμενες πράξεις είναι προφανώς συνεχείς.*

Παράδειγμα 4.0.0.9 *Οι μιγαδικοί αριθμοί με την πρόσθεση είναι ομάδα. Οι μιγαδικοί αριθμοί μπορούν να αναπαρασταθούν με τα σημεία του επιπέδου, δηλαδή τον $\mathbb{R}^2$, ο οποίος είναι τοπολογικός (μετρικός) χώρος και οι προηγούμενες πράξεις είναι προφανώς συνεχείς.*

Παράδειγμα 4.0.0.10 *Ας θεωρήσουμε τους μιγαδικούς με μήκος ένα, δηλαδή την υποομάδα S^1 της πολλαπλασιαστικής ομάδας $\mathbb{C}^*$. Και αυτή είναι επίσης τοπολογική ομάδα. Γνωρίζουμε επίσης ότι η συγκεκριμένη ομάδα είναι ισόμορφη με τους πραγματικούς πηλίκο τους ακεραίους $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$.*

notes

$(\mathbb{C}, +) \to (\mathbb{R}^2, +)$

$\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$((a_1, b_1), (a_2, b_2))$

$\mapsto (\underbrace{a_1 + a_2}, \underbrace{b_1 + b_2})$

$\mathbb{R} \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

$M(n\times n,\mathbb{R})\times M(n\times n,\mathbb{R})\to$

$M(n\times n,\mathbb{R})\quad (A,B)\mapsto AB$

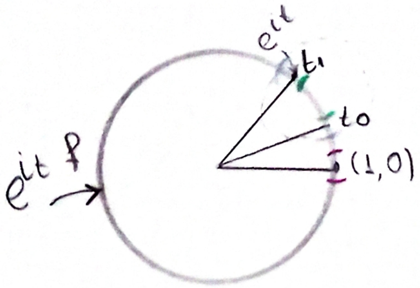
$GL_n\times GL_n\to GL_n$

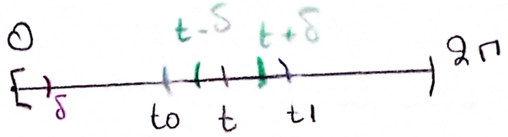
Οι βασικές περιοχές του

$I_{n\times n}$ θα είναι

$(I_{n\times n}+S_{\varepsilon}(O_{n\times n}))\cap GL_n$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4.0.0.7





γν. αυξ. ανοιχτή περιοχή, άρα είναι ανοιχτή και σε εκείνο το σημείο.

Μια μικρή ανοιχτή περιοχή του 0 : $[0,\delta)$ ανοιχτό στο $[0,2\pi)$
(όχι στον $\mathbb{R}$!)

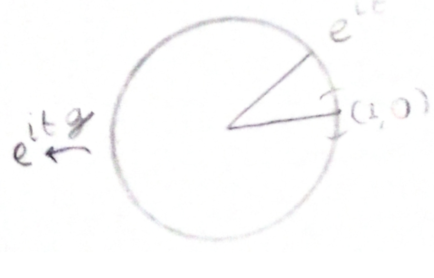
Θέλω η f να στέλνει το $[0,\delta)$ στην ανοιχτή περιοχή του 0

Άρα f 1-1, επί και συνεχής.

Επί: αν πάρω μια γωνία και την πάρω από την άλλη μεριά, θα παραμένει ίδια η γωνία

- Άρα $\exists\, g: S^1 \to [0,2\pi)$

Σπίτι: γιατί δεν είναι g συνεχής;



Άσκηση

Ένας τοπολογικός χώρος X είναι Hausdorff αν-ν η διαγώνιος $\Delta = \{(x,x) \mid (x,x) \in X \times X\}$ είναι κλειστό υποσύνολο του $X \times X$.

ο Αρκεί ν.δ.ο. το $X \times X \setminus \Delta$ είναι ανοιχτό

$(x_1, x_2) \in X \times X \setminus \Delta \iff x_1 \neq x_2$

X Hausdorff $\exists$ περιοχές του x_1 και του x_2 (Συνέχεια 2ηια)

Θα πάρω ένα a στο x_1 και ένα b στο x_2 (αφού είμαι στην καρτεσιανή τοπολογία) που τέμνονται μεταξύ τους.

Λήμμα 4.0.0.11 *Μια τοπολογική ομάδα είναι χώρος Hausdorff. Δηλαδή για κάθε δύο στοιχεία του χώρου υπάρχουν δυο ανοικτά ξένα υποσύνολα τα οποία περιέχουν τα στοιχεία αντίστοιχα.* Δηλ. διαχωρίζει σημεία

Με βάση το 4.0.0.9

Παράδειγμα 4.0.0.12 *Εστω $M_n(\mathbb{R})$ το σύνολο των πραγματικών τετραγωνικών πινάκων. Κάθε στοιχείο αυτής της ομάδας μπορεί να θεωρηθεί σαν ένα στοιχείο του $\mathbb{R}^{n^2}$ βάζοντας τις γραμμές του πίνακα την μία δίπλα στην άλλη.* Οπτη *Οπότε το $M_n(\mathbb{R})$ είναι και τοπολογικός χώρος και σαν βασικά σύνολα του μηδενικού στοιχείου μπορούμε να θεωρήσουμε τα υποσύνολα*

$$S_\varepsilon(0) = \left(A = (a_{i,j}) \in M(n, \mathbb{R}) \mid \sum_{1 \le i \le n} \sum_{1 \le j \le n} a_{i,j}^2 < \varepsilon \right\}$$

για κάθε $\varepsilon > 0$.

Αν $B \in M(n, \mathbb{R})$ έχουμε τα βασικά υποσύνολα στον B να δίνονται από

$$S_\varepsilon(B) = B + S_\varepsilon(0)$$

για κάθε $\varepsilon > 0$.

Τώρα οι πράξεις που είναι εφοδιασμένο το $M(n, \mathbb{R})$, της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού, είναι συνεχείς. Αν θεωρήσουμε κάποιο υποσύνολό του το οποίο να είναι ομάδα με το γινόμενο των πινάκων, όπως το σύνολο $GL_n(\mathbb{R})$ των αντιστρέψιμων πινάκων, και η απεικόνιση η οποία στέλνει τον A στον αντίστροφό του A^{-1} είναι επίσης συνεχής. Αυτά λοιπόν τα υποσύνολα είναι τοπολογικές ομάδες. Θα δούμε αργότερα ότι είναι ομάδες Lie.

Πρόταση 4.0.0.13 *Κάθε υποομάδα τοπολογικής ομάδας είναι τοπολογική ομάδα με την τοπολογία του υποχώρου.*

Έστω a ένα συγκεκριμένο στοιχείο της τοπολογικής ομάδας O. Ορίζεται η απεικόνιση $L_a : O \to O$ με τύπο $L_a(g) = ag$ η οποία είναι ομοιομορφισμός και καλείται αριστερή μεταφορά. Αν c και b είναι δύο στοιχεία της, τότε υπάρχει ομοιομορφισμός L_a ο οποίος στέλνει το b στο c με $a = cb^{-1}$. Αυτό δηλώνει ότι ανοικτές περιοχές των c και b είναι τοπολογικά όμοιες. Άρα τοπικά σε κάθε σημείο είναι όμοιες. Αρκεί λοιπόν να τις μελετήσουμε γύρω από το ταυτοτικό στοιχείο. Αυτή ήταν και η αρχική προσέγγιση του Lie. Αν το a διαφέρει από το ταυτοτικό στοιχείο, τότε η L_a δεν έχει σταθερό σημείο, $L_a(g) \neq g$.

Ανάλογα ορίζεται και η δεξιά μεταφορά $R_a : O \to O$ η οποία είναι επίσης ομοιομορφισμός. Ακόμη μια σημαντική απεικόνιση είναι και ο εσωτερικός ομοιομορφισμός για κάθε στοιχείο a με τύπο $O_a(g) = aga^{-1}$.

Αναφέρουμε επιγραμματικά βασικούς ορισμούς και προτάσεις που θα χρησιμοποιήσουμε στη μελέτη μας.

Αποδειξη Προτασης 4.0.0.13

$Y \leq O$ υποομαδα

O τοπ. χωρος Y υποχ. τοπολ $\Leftrightarrow$

(A ανοιχτό στον $Y \Leftrightarrow \exists B$ ανοιχτό στον $Y \Leftrightarrow$

$\exists B$ ανοιχτό στον O ωστε $A = B \cap Y$)

Θ.ν.δ.ο. $f : Y \times Y \to Y$ είναι συνεχής

$(a,b) \longmapsto ab^{-1}$

Αν δείξω το παραπανω τότε είναι τοπ. ομαδα.

Εστω A ανοιχτό του $ab^{-1} \in O$. $A \cap Y$ είναι ανοιχτο του ab^{-1} στον Y.

$\exists A_1$ ανοιχτό του a και B_1 ανοιχτό του b ωστε:

$f(A_1, B_1) \subseteq A$.

Αλλά $f(\underbrace{A_1 \cap Y, B_1 \cap Y}_{\text{ανοιχτά στον } Y}) \subseteq A \cap Y$